

14  
Total No. of Printed Pages—8

2 SEM FYUGP MTHC2

2024

( May/June )

MATHEMATICS

( Core )

Paper : MTHC2

( Real Analysis and Differential Equations )

Full Marks : 80

Pass Marks : 24

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions*

SECTION—A

( Real Analysis )

UNIT—I

(a) সত্য নে অসত্য লিখা :

Write True or False :

বদ্ধ অন্তর্বাল  $[x, x]$  ক আমি একক সংহতি  $\{x\}$  হিচাপে  
লিখিব পাৰো।

1

The closed interval  $[x, x]$  can be written  
as the singleton set  $\{x\}$ .

(b) বাস্তব সংখ্যা ( $\mathbb{R}$ )ৰ পূৰ্ণতাৰ ধৰ্মটো লিখা।

1

State the completeness property of  $\mathbb{R}$ .

24P/1137

( Turn Over )

2nd SEM 2024  
MATHEMATICS

( 2 )

- (c) যদি  $a \in \mathbb{R}$  যাতে  $a \cdot a = a$ , তেজ্জে প্রমাণ কৰা যে হয়  $a = 0$  অথবা  $a = 1$ . 2
- If  $a \in \mathbb{R}$  such that  $a \cdot a = a$ , then prove that either  $a = 0$  or  $a = 1$ .
- (d) যদি  $a \in \mathbb{R}$  আৰু  $a \neq 0$ , তেজ্জে প্রমাণ কৰা যে  $a^2 > 0$ . 2
- If  $a \in \mathbb{R}$  and  $a \neq 0$ , then prove that  $a^2 > 0$ .
- (e) সংহতিৰ সীমা বিন্দুৰ সংজ্ঞা আগবঢ়োৱা। বলজান'-ওৰাৰাচ্ট্ৰেইছৰ সূত্রটো (সংহতিৰ বাবে) লিখা।  $1+1=2$
- Define limit point of a set. Write the Bolzano-Weierstrass theorem for set.
- (f) ধৰা হ'ল  $S$  এটা  $\mathbb{R}$  ব অবিভক্ত আৰু উচ্চ পৰিবদ্ধ উপসংহতি আৰু  $a \in \mathbb{R}$  যি কোনো এটা সংখ্যা। যদি  $a+S = \{a+s : s \in S\}$ , তেজ্জে প্রমাণ কৰা যে 4

$$\sup(a+S) = a + \sup S$$

Let  $S$  be a non-empty subset of  $\mathbb{R}$  such that  $S$  is bounded above. Let  $a \in \mathbb{R}$  be any number. If  $a+S = \{a+s : s \in S\}$ , then prove that

$$\sup(a+S) = a + \sup S$$

অথবা / Or

যদি  $y > 0$ , তেজ্জে দেখুওৱা যে  $n_y \in \mathbb{N}$  ব কাৰণে  $n_y - 1 \leq y \leq n_y$ .

If  $y > 0$ , then show that there exists  $n_y \in \mathbb{N}$  such that  $n_y - 1 \leq y \leq n_y$ .

24P/1137

(Continued)

( 3 )

- (g) যদি  $x$  আৰু  $y$  দুটা যি কোনো বাস্তৱ সংখ্যা যাতে  $x < y$ , তেজ্জে দেখুৱাব লাগে যে আমি এটা  $r \in \mathbb{Q}$  পায় যাতে  $x < r < y$ . 3
- If  $x$  and  $y$  are any real numbers with  $x < y$ , then show that there exists a rational number  $r \in \mathbb{Q}$  such that  $x < r < y$ .
- (h) প্রমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি  $\mathbb{R}$  গণনীয় নহয়। 5
- Show that the set of real numbers  $\mathbb{R}$  is not countable.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে এনেকুৱা কোনো পৰিমেয় সংখ্যা  $r$  পোৱা নাযায় যাতে  $r^2 = 2$ .

Show that there does not exist a rational number  $r$  such that  $r^2 = 2$ .

UNIT—II

2. (a) একদিক্ৰম অভিসৰী উপপাদ্যটো লিখা। 1
- State monotone convergence theorem.
- (b) শ্ৰেণীৰ বাবে ক'চিৰ নিৰ্ণায়কটো লিখা। 1
- State Cauchy criterion for series.
- (c) প্রমাণ কৰা যে এটা বাস্তৱ অনুক্রমৰ অতিবেছি এটা সীমাহে থাকিব পাৰে। 2
- Prove that a sequence in  $\mathbb{R}$  can have at most one limit.

24P/1137

(Turn Over)

( 4 )

(d) যদি  $x_n$  অনুক্রমটো  $x$  লৈ অভিসাৰী আৰু  $y_n$  অনুক্রমটো  $y$  লৈ অভিসাৰী হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে  $x_n y_n$  অনুক্রমটো  $xy$  লৈ অভিসাৰী হ'ব। 4

If  $x_n$  and  $y_n$  are two sequences such that  $x_n$  converges to  $x$  and  $y_n$  converges to  $y$ , then show that  $x_n y_n$  converges to  $xy$ .

(e) দেখুওৱা যে  $x_n$  অনুক্রমটো অপসাৰী য'ত  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  4

Show that the sequence  $x_n$  with

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

is divergent.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে  $x_n$  অনুক্রমটো অভিসাৰী য'ত

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Show that the sequence  $x_n$  with

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

is convergent.

(f)  $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  শ্ৰেণীটো অপসাৰী বুলি দেখুওৱা। 3

Show that the series  $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  is divergent.

24P/1137

(Continued)

( 5 )

(g) তলৰ যি কোনো এটা শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা : 5  
Test the convergence of any one of the following series :

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} x^n, x > 0$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$

SECTION—B

( Differential Equations )

UNIT—III

3. (a) অৱকল সমীকৰণৰ বিশেষ সমাধান বুলিলে কি বুজা? 1  
What do you mean by particular solution of a differential equation?

(b) তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা অনুকলনীয় উৎপাদক উলিওৱা : 1

Find an integrating factor of the following differential equation :

$$t^2 \frac{dx}{dt} + x = 1$$

(c) তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা : 2  
Solve the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

24P/1137

( Turn Over )

( 6 )

- (d) দেখুওৱা যে,  $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$  হ'ল  
 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  অৱকল সমীকৰণৰ এটা বহিৰ্লিখিত  
 সমাধান।

2

Show that  $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$  is an  
 explicit solution of the differential  
 equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

- (e) তলৰ যি কোনো তিনিটা অৱকল সমীকৰণ সমাধান কৰা :  
 $3 \times 3 = 9$

Solve any three of the following  
 differential equations :

(i)  $(xy + 2x + y + 2) dx + (x^2 + 2x) dy = 0$

(ii)  $\frac{dy}{dx} + 3y = 3x^2 e^{-3x}$

(iii)  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

(iv)  $(y \sec^2 x + \sec x \tan x) dx +$   
 $(\tan x + 2y) dy = 0$

UNIT—IV

4. (a)  $n$  মাত্ৰাবিশিষ্ট সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা  
 দিয়া।

Define  $n$ th order homogeneous linear  
 differential equation.

1

- (b) যদি এটা ধ্ৰুৱক সহগযুক্ত সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ  
 সহায়ক সমীকৰণৰ মূল  $2 \pm 3i$  হয়, তেন্তে অৱকল  
 সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ বা সামূহিক সমাধান নিৰ্ণয় কৰা। 1

If the auxiliary equation has the root  
 $2 \pm 3i$ , then write the general solution  
 of the corresponding homogeneous  
 linear differential equation with  
 constant coefficients.

- (c) দ্বিমাত্ৰিক সমমাত্ৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ বাবে  
 সম্মাৰোপন নীতিটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।  $1+3=4$

State and prove the principle of super-  
 position for homogeneous linear  
 differential equation of 2nd order.

- (d)  $n$ টা ফলনৰ এটা সংহতিৰ বাবে বনফ্ৰিয়ানৰ সংজ্ঞা  
 আগবঢ়োৱা। দেখুওৱা যে,

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানকেইটা ক্ৰমে  $e^x$ ,  $e^{-x}$  আৰু  
 $e^{2x}$  বৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ। অৱকল সমীকৰণটোৰ সামূহিক  
 সমাধানটো লিখা।  $1+3+1=5$

Define Wronskian for a set of  $n$  functions.  
 Show that the solutions  $e^x$ ,  $e^{-x}$  and  $e^{2x}$   
 of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

are linearly independent. Write its  
 general solution.

(e) অনির্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$$

অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

6

Use the method of undetermined coefficients to solve  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2$ .

অথবা / Or

প্ৰাচলৰ ভেদ/বিচৰণ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা

Use the method of variation of parameters to solve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \sec nx$$

(f) সমাধান কৰা (যি কোনো দুটা) :

4×2=8

Solve (any two) :

$$(i) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$$

$$(ii) \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$$

$$(iii) \frac{d^4y}{dx^4} + m^4y = 0$$

\*\*\*