Paper : GE—4.2

(Application of Algebra)

1. তলৰ যি কোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া : 6×2=12

Answer any *two* of the following questions :

(a) ধৰাহওক, V, mটা মৌল থকা এটা সংহতি আৰু $D = V^{(k)}$ হৈছে kটা মৌল থকা Vৰ সকলো উপ-সংহতিৰ সংহতি, $1 < k < m$. তেনেহ'লে দেখুওৱা যে D হৈছে (m, b, r, k, λ) প্ৰাচলৰ সৈতে Vৰ এটা BIBD, য'ত

Let V be a set of m elements, and let $D = V^{(k)}$ be the set of all subsets of V having k elements, $1 < k < m$. Then show that D is a BIBD on V with parameters (m, b, r, k, λ), where

$$b = \binom{m}{k};\ r = \binom{m-1}{k-1};\ \lambda = \binom{m-2}{k-2}$$

(b) যদি (v, b, r, k, λ) প্ৰাচলৰ সৈতে এটা BIBDৰ অস্তিত্ব থাকে তেন্তে তলৰ সম্বন্ধবোৰ প্ৰমাণ কৰা :

If there exists a BIBD with parameters (v, b, r, k, λ), then prove the following :

(i) $vr = bk$

(ii) $r(k-1) = \lambda(v-1)$

(iii) $b > r > \lambda$

(c) ধৰাহওক, A এটা BIBDৰ ইন্সিডেন্স মেট্ৰিক্স। তেন্তে প্ৰমান কৰা যে AA^T এটা অব্যক্ষীয়মান মেট্ৰিক্স।

Let A be the incidence matrix of a BIBD. Then prove that AA^T is a non-singular matrix.

2. (a) যদি $S = \{1, 2, 4\}$, $(7, 3, 1)$ প্ৰাচলৰ সৈতে যোগাত্মক গ্ৰুপ $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ৰ অন্তৰ সংহতি হয়, তেন্তে BIBDবোৰ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Find the BIBDs determined by the difference set $S = \{1, 2, 4\}$ in the additive group $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ with parameter $(7, 3, 1)$.

অথবা / Or

(b) দ্বিঘাত ৰেচিডিউ মডুল' 11ৰ সংহিতটো নিৰ্ণয় কৰা আৰু ইয়াৰ দ্বাৰা সমমিত BIBD এটা গঠন কৰা।

Find the set of quadratic residues modulo 11, and construct the symmetric BIBD determined by it.

3. তলৰ যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া : 6×2=12

Answer any *two* of the following questions :

(a) ধৰাহওক, C ন্যূনতম দৈৰ্ঘ্য dৰ সৈতে এটা ক'ড আৰু $t = \left[\frac{d-1}{2}\right]$, সৰ্ব্বোচ্চ অখণ্ড সংখ্যা $\leq \frac{d-1}{2}$. তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে—

Let C be a code with minimum distance d. Let $t = \left[\frac{d-1}{2}\right]$ denote the greatest integer $\leq \frac{d-1}{2}$. Then prove that—

(i) Cয়ে ট্ৰেন্সমিট কৰা ক'ডৱৰ্ডৰ ভুলবোৰ $d-1$লৈকে ধৰা পেলাব পাৰে;

C can detect up to $d-1$ errors in any transmitted codeword;

(ii) Cয়ে ট্ৰেন্সমিট কৰা ক'ডৱৰ্ডৰ ভুলবোৰ tলৈকে ধৰা পেলাব পাৰে।

C can detect up to t errors in any transmitted codeword.

(b) এটা প্ৰমাণ কৰা যে, Ham(r, q) হৈছে ন্যূনতম দৈৰ্ঘ্য 3ৰ সৈতে এটা নিখুঁত ক'ড।

Prove that Ham(r, q) is a perfect code with minimum distance 3.

(c) চাইক্লিক ক'ডৰ সংজ্ঞা দিয়া। ধৰাহওক, G হৈছে ৰৈখিক [n, k]-ক'ড Cৰ এটা জেনেৰেটৰ মেট্ৰিক্স। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে C এটা চাইক্লিক ক'ড হ'ব যদি কেৱল যদিহে $\sigma(G_i) \in C$ হয় প্ৰত্যেক শাৰী Gৰ G_iৰ বাবে।

Define cyclic code. Let G be a generator matrix of a linear [n, k]-code C. Then prove that C is a cyclic code if and only if $\sigma(G_i) \in C$ for each row G_i of G.

(Turn Over)

4. $\mathbb{F}_{11}$ত [10, 8]-ক'ড Cৰ ন্যূনতম দৈৰ্ঘ্য সমতা পৰীক্ষা কৰা মেট্ৰিক্স Hৰ সৈতে নিৰ্ণয় কৰা, য'ত 4

Find the minimum distance of the [10, 8]-code C over $\mathbb{F}_{11}$ with parity-check matrix H, where

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

5. (a) ধৰাহওক, $\alpha, \beta \in S_x$ এটা বিচ্ছিন্ন বিন্যাস। তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\alpha\beta = \beta\alpha$. 4

Let $\alpha, \beta \in S_x$ be disjoint permutations. Then prove that $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(b) এটা সংহতিৰ ওপৰত এটা গ্ৰুপৰ ক্ৰিয়াৰ বিষয়ে চমু টোকা লিখা। 4

Write a short note on the action of a group on a set.

(c) পলিয়াৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ আৰু প্ৰমাণ কৰা। 8

State and prove Polya's theorem.

অথবা / Or

চাৰিটা শীৰ্ষ বিন্দুৰ অসমৰূপী গ্ৰাফৰ বাবে জেনেৰেটিং ফলন $f_4(x)$ নিৰ্ণয় কৰা।

Find the generating function $f_4(x)$ for the non-isomorphic graphs on four vertices.

(Continued)

6. (a) $Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ পজিটিভ ডেফিনিট হয় নে নহয়, পৰীক্ষা কৰা।

Check whether $Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ is positive definite or not. 4

(b) $x^T x = 1$ চৰ্ত সাপেক্ষে

$$Q(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2\text{ৰ}$$

সৰ্ব্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

Find the maximum and minimum values of $Q(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$ subject to the constraint $x^T x = 1$. 6

(c) ধৰাহওক, A হৈছে ৰেংক rৰ সৈতে $m \times n$ৰ এটা মেট্ৰিক্স। তেন্তে দেখুওৱা যে তাত $m \times n$ মেট্ৰিক্স, $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ থাকে, য'ত Dত ডায়োগনেল মৌলবোৰ প্ৰথম rটা Aৰ একক মান $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$; আৰু $m \times m$ অৰ্থোগোনেল মেট্ৰিক্স U আৰু $n \times n$ অৰ্থোগনেল মেট্ৰিক্স Vৰ বাবে $A = U \Sigma V^T$.

Let A be an $m \times n$ matrix with rank r. Then show that there exists an $m \times n$ matrix $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ for which the diagonal entries in D are the first r singular values of A, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, and there exists an $m \times m$ orthogonal matrix U and an $n \times n$ orthogonal matrix V such that $A = U \Sigma V^T$. 6

7. (a) $Ax = b$ৰ লিষ্ট-স্কোৱৰৰ সমাধান উলিওৱা য'ত $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ আৰু $b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Find a least squares solution of $Ax = b$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 8

(b) তলৰ মেট্ৰিক্সটো ৰ'-ৰিদিউসদ এশ্বিলন ফৰ্মলৈ নিবলৈ ৰ'-ৰিদাকশ্যন এলগ'ৰিথম ব্যৱহাৰ কৰা :

Use row-reduction algorithm to reduce the following matrix into row-reduced echelon form : 8

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$