1 SEM FYUGP MTHC1

2023

(December)

MATHEMATICS

(Core)

Paper : MTHC1

(Calculus and Classical Algebra)

Full Marks : 80
Pass Marks : 24

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* যদি (If)

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

তেন্তে দেখুওৱা যে (then show that)

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2}$$

আৰু (and)

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$$ 5

অথবা / Or

দেখুওৱা যে (Show that)

$$\sinh x - \sinh y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$$

(b) $\sin\alpha$ আৰু $\cos\alpha$ ক αৰ উচ্চ সূচাংকৰ পদত বিস্তৃতি দিয়া। 5

Expand $\sin\alpha$ and $\cos\alpha$ in ascending powers of α.

অথবা / Or

দেখুওৱা যে (Show that), যদি (if)

$$u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

তেন্তে (then)

(i) $\sinh u = \tan\theta$

(ii) $\tanh u = \sin\theta$

(c) দেখুওৱা যে, যদি $n \in \mathbb{N}$ আৰু

Show that, if $n \in \mathbb{N}$, and

$$(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

তেন্তে (then)

$$c_0 + c_4 + c_8 + \cdots = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{n\pi}{4}$$ 5

অথবা / Or

দেখুওৱা যে (Show that)

$$(a+ib)^{\frac{m}{n}} + (a-ib)^{\frac{m}{n}} = 2(a^2+b^2)^{\frac{m}{2n}}\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

2. (a) লিব্‌নিজৰ সূত্ৰটো উল্লেখ কৰা। 1

State Leibnitz theorem.

(b) তলৰ যি কোনো এটাৰ y_n নিৰ্ণয় কৰা : 3

Find y_n of any *one* of the following :

(i) $y = e^{ax}\sin(bx+c)$

(ii) $y = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

(c) যদি (If) $y = (x^2-1)^n$, তেন্তে দেখুওৱা যে (then show that)

$$(x^2-1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$$ 3

(d) ল'পিটেলৰ নিয়ম প্ৰয়োগ কৰি যি কোনো এটাৰ মান নিৰ্ণয় কৰা : 4

Use L'Hospital's rule to evaluate any *one* :

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1-x^2)}{\log_e\cos x}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x + \log_e(1-x) - 1}{\tan x - x}$

(e) প্ৰথম অৱকলজ পৰীক্ষাৰ দ্বাৰা তলৰ ফলনটোৰ চৰমমান আৰু সংকট বিন্দু, যদি থাকে, নিৰ্ণয় কৰা :

$$f(x) = x^3$$ 4

Use first derivative test to detect the extrema and critical point of the function $f(x) = x^3$, if they exist.

3. (a) যদি (If)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx \;;\; n \in \mathbb{N}$$

তেন্তে দেখুওৱা যে (then show that)

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{2}{3}$$

যেতিয়া (when) n হ'ল অযুগ্ম (n is odd)

আৰু (and)

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

যেতিয়া (when) n হ'ল যুগ্ম (n is even). 5

অথবা / Or

দেখুওৱা যে (Show that)

$$\int_0^a x^3 (2ax - x^2)^{3/2} dx = a^7 \left(\frac{9\pi}{32} - \frac{23}{35} \right)$$

(b) (i) ৰেক্টিফিকেশনৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define rectification.

(ii) নিম্নোক্ত বক্ৰৰ $\theta = 0$ৰ পৰা $\theta = \pi$ লৈকে দীঘ উলিওৱা : 4

Find the length of the curve measured from $\theta = 0$ to $\theta = \pi$:

$$x = e^{\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2} \right)$$

$$y = e^{\theta}\left(\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2} \right)$$

অথবা / Or

দেখুওৱা যে

Show that the length of an arc of the curve

$$x \sin t + y \cos t = f'(t)$$
$$x \cos t - y \sin t = f''(t)$$

বক্ৰটোৰ এটা চাপৰ দীঘ হ'ব

is

$$s = f(t) + f''(t) + k$$

য'ত k এটা অনুকলন ধ্ৰুৱক (where k is a constant of integration)।

(c) তলৰ এষ্ট্ৰইডটোৰ আৱৰ্তনৰ ফলত উৎপত্তি হোৱা গোটা বস্তুটোৰ আয়তন আৰু পৃষ্ঠভাগৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা : 5

Find the volume and surface area of the solid generated by revolving the astroid :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

অথবা / Or

তলৰ চাইক্লইডটোৰ ভূমি সাপেক্ষে আৱৰ্তনৰ ফলত উদ্ভৱ হোৱা গোটা বস্তুটোৰ আয়তন আৰু পৃষ্ঠভাগৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা :

Find the volume and surface area of the solid generated by revolving the cycloid about its base :

$$x = a(t + \sin t)\ ;\ \ y = a(1 + \cos t)$$

4. (a) (i) খালী ঠাই পূৰণ কৰা : 1

এটা ফলন প্ৰতিলোমীয় হ'ব যদি আৰু যদিহে _____।

Fill up the blank :

A map is invertible if and only if it is _____.

(ii) দেখুওৱা যে যদি $f : A \to B$ আৰু $g : B \to C$ এক-ঐকিকী আচ্ছাদক, তেন্তে $gf : A \to C$ ও এক-ঐকিকী আচ্ছাদক হ'ব। 4

Show that if $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are one-one-onto, then so is $gf : A \to C$.

(b) ইউক্লিডৰ এল্গ'ৰিথ্‌ম উদ্ধৃতি দি প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Euclid's algorithm.

(c) যদি (If), $a \equiv b(\bmod n)$, তেন্তে দেখুওৱা যে (then show that)

$$\gcd(a, n) = \gcd(b, n)$$ 5

5. (a) এটা ৰৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালীৰ সমাধানৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define solution of a linear system of equations.

(b) এটাতকৈ বেছি মৌল থকা এটা ৰৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল ভেক্টৰৰ সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a set of linearly dependent vectors containing more than one element.

(c) এটা মৌলকক্ষৰ এশ্বিলন আকাৰৰ সংজ্ঞা দিয়া। 2

Define Echelon form of a matrix.

(d) এটা মৌলকক্ষৰ যি কোনো দুটা প্ৰাথমিক শাৰী সংক্ৰিয়াৰ উদ্ধৃতি দিয়া। 2

State any two elementary row operations permissible on a matrix.

(e) তলৰ মৌলকক্ষক এশ্বিলন আকাৰলৈ নিয়া : 4

Reduce the following matrix into echelon form :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) তলৰ মৌলকক্ষটো RREFলৈ সলনি কৰা: 5

Reduce the following matrix into row reduced echelon form (RREF) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(g) দেখুওৱা যে, তলৰ ভেক্টৰকেইটা ৰৈখিকভাৱে নিৰ্ভৰশীল : 5

Show that the following vectors are linearly dependent :

$$(1, 1, 2), \ (1, 2, 5), \ (5, 3, 4)$$

★★★